EJERCICIO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS **CAPÍTULO 83**

AUTOR DEL CURSO: Javier García

EJERCICIO RESUELTO: Miguel Ángel Montañez 9-07-2022

Ejercicio 83.1 Demostrar que: $\int d^4x\, e^{ipx}(\partial^2 + m^2)\, G(x) = \int d^4x\, e^{ipx}(-p^2 + m^2)\, G(x)$.

En esta expresión p y x son cuadrivectores, el producto $px = p_\mu x^\mu$, y $\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$.

$$\int d^4x\, e^{ipx}(\partial^2 + m^2)\, G(x) = \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\, G(x)$$

El segundo término lo separamos en dos integrales:

$$m^2 \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, G(x) + \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, \partial_\mu\partial^\mu G(x)$$

Ahora nos centramos en la segunda integral:

$$\int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, \partial_\mu\partial^\mu G(x) = \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, (\partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3)\, G(x)$$

Bajamos índices:

$$\int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\, (\partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3)\, G(x)$$

y separamos:

$$\int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0{}^2G(x) - \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_1{}^2G(x) - \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_2{}^2G(x) - \int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_3{}^2G(x)$$

A continuación, tomamos una integral, por ejemplo la primera, e integramos por partes respecto a x^0:

$$\int d^4x\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0{}^2G(x) = \int d^3x \int dx^0\, \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0{}^2G(x)$$ *(d^3x volumen espacial)*

$$\int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0^2 G(x) = \left|\exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0 G(x)\right| - ip_o \int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0 G(x)$$

(los límites de integración se toman de - ∞ a ∞)

y volvemos a integrar:

$$\int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0^2 G(x) = \left|\exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0 G(x)\right| - ip_o \left[\left|\exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)\right| - ip_o \int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)\right]$$

Llamamos $A(x_1, x_2, x_3) = \left|\exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0 G(x)\right|$ y $B(x_1, x_2, x_3) = \left|\exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)\right|$

Como nos explicó Javier en el capítulo 83, si se utilizan paquetes de ondas en vez de partículas localizadas en la demostración LSZ, los términos $A(x_1, x_2, x_3)$ y $B(x_1, x_2, x_3)$ se hacen cero en $x_0 = \infty$ y $-\infty$, por lo que la integral nos queda:

$$\int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0^2 G(x) = A(x_1, x_2, x_3) - ip_o B(x_1, x_2, x_3) - p_o^2 \int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

$$\int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0^2 G(x) = - p_o^2 \int dx^0 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

De modo que:

$$\int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_0^2 G(x) = - p_o^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

Si hacemos lo mismo con las demás integrales:

$$\int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_1^2 G(x) = - p_1^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

$$\int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_2^2 G(x) = - p_2^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

$$\int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\}\partial_3^2 G(x) = - p_3^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

Ahora sumamos obteniendo:

$$\int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\} \partial_\mu\partial^\mu G(x) = - p^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

donde $p^2 = p_\mu p^\mu = p_0p^0 + p_1p^1 + p_2p^2 + p_3p^3 = p_0p_0 - p_1p_1 - p_2p_2 - p_3p_3 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$.

Entonces:

$$m^2 \int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x) - p^2 \int dx^4 \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x) = (-p^2 + m^2) \int d^4x \exp\{ip_\mu x^\mu\} G(x)$$

Concluyendo la demostración:

$$\int d^4x\, e^{ipx}(\partial^2 + m^2)\, G(x) = (-p^2 + m^2) \int d^4x\, e^{ipx}\, G(x)$$

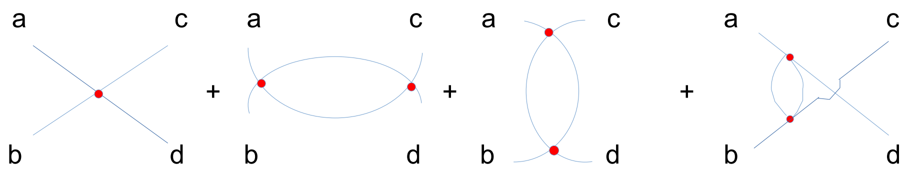
Ejercicio 83.2 Calcular la matriz amplitud de scattering a orden 2, $\mathcal{M}^{(2)}$, en la teoría ($\lambda\phi 4$) para la interacción entre dos partículas.

Ya hemos visto en el capítulo 83 cómo se calcula la integral ${}_{out}\langle p_cp_d|p_ap_b\rangle_{in}$ en la interacción de dos partículas, de momentos p_a y p_b, cuyo estado final son dos partículas con momentos p_c y p_d:

$${}_{out}\langle p_cp_d|p_ap_b\rangle_{in} = \lim_{p_k^2 \to m^2} (p_c^2 - m^2 + i\varepsilon)/i \cdot (p_d^2 - m^2 + i\varepsilon)/i \cdot (p_a^2 - m^2 + i\varepsilon)/i \cdot (p_b^2 - m^2 + i\varepsilon)/i$$
$$\cdot TF\{ \langle\Omega|T\phi(x_c)\phi(x_d)\phi(x_a)\phi(x_b)|\Omega\rangle\}$$

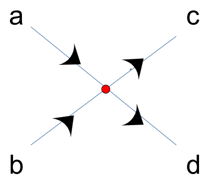
En esta expresión, el límite nos garantiza que sólo los diagramas totalmente conectados tengan contribución a la integral, y los términos $(p_k^2 - m^2 + i\varepsilon)/i$ la "amputación" de las patas de cada figura.

En consecuencia, hasta orden dos:

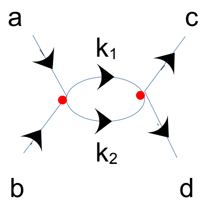
${}_{out}\langle p_cp_d|p_ap_b\rangle_{in}^{(2)} =$ 

Son los diagramas donde hay conexión total.

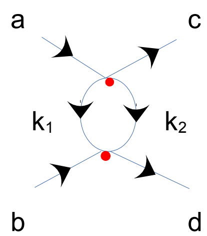
Aplicando las reglas de Feynman definitivas *(eliminando los términos correspondientes a las patas de las figuras)*, tenemos:



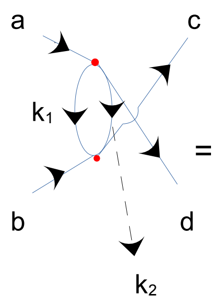
$$= \quad (-i\lambda)\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$



$$= \; -\lambda^2/2\cdot \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a + p_b - k]^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot (2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$



$$= \; -\lambda^2/2\cdot \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a - p_c - k]^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot (2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$



$$= \; -\lambda^2/2\cdot \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a - p_d - k]^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot (2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$

La matriz amplitud de scattering se define de modo que:

$${}_{out}\langle p_c p_d | p_a p_b \rangle_{in} = i\mathcal{M}(p_a p_b \rightarrow p_c p_d)\,(2\pi)^4\,\delta^4(p_a + p_b - p_c - p_d)$$

En nuestro caso, a orden 2:

$$\mathcal{M}^{(2)} = -\lambda + i\lambda^2/2\cdot \Big\{ \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a + p_b - k]^2 - m^2 + i\varepsilon) + \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a - p_c - k]^2 - m^2 + i\varepsilon) + \int d^4k\; i/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)\cdot i/([p_a - p_d - k]^2 - m^2 + i\varepsilon)\Big\}$$

El primer diagrama se puede interpretar como una colisión típica de la mecánica clásica. Dos partículas chocan y modifican sus momentos, respetando el principio de conservación.

En el segundo, las partículas también colisionan pero desaparecen, dando lugar a la formación de “algo virtual” que, tras una fracción de tiempo muy pequeña, vuelve a formar dos partículas reales con momentos distintos.

En el tercero no hay colisión entre las partículas, pero interaccionan intercambiando “algo virtual”, durante una fracción de tiempo muy corta, haciendo que se separen. Parece una “interacción a distancia” repulsiva.

En el cuarto y último diagrama ocurre lo mismo que en el tercero, pero las partículas se aproximan en vez de separarse. Parece una “interacción a distancia” atractiva.